Wie groß ist die Fläche eines Kreises?

Die Kreiszahl π beschreibt das Längenverhältnis von Umfang (u) und Durchmesser (d) eines Kreises. Mit mathematischen Symbolen ausgedrückt lautet diese Tatsache $u/d = \pi$. Das bedeutet: Wenn man den Durchmesser mit π multipliziert, erhält man den Umfang eines Kreises, das heißt: $u = \pi \cdot d$. Da $d = 2r$ ist, kann man dies auch mit dem Radius r ausdrücken: $u = 2\pi r$. Dies gilt für jeden Kreis, unabhängig von seiner Größe. Die Zahl π ist ungefähr gleich 3,14159…

Diese Zahl π dient auch dazu, den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen. Das kann man mit dem Experiment nachweisen. Die zwölf „Kuchenstücke" füllen den Kreis komplett aus; ihr gesamter Flächeninhalt ist also gleich dem Flächeninhalt des Kreises.

Wir legen die Kuchenstücke nun auf das andere Feld; wir achten dabei darauf, dass sich rote und blaue Stücke abwechseln. Wenn man die Kuchenstücke umlegt, füllen sie (ungefähr) ein Parallelogramm aus. Wenn man noch großzügiger ist, füllen sie ein Rechteck aus. Nehmen wir für einen Augenblick an, die Fläche wäre ein Rechteck. Dann wäre seine lange Seite der halbe Umfang des Kreises (nämlich zum Beispiel alle Außenkanten der roten Teile) und seine kurze Kante wäre gleich dem Radius. Der Flächeninhalt wäre also $u/2r$. Wenn wir $u = 2\pi r$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{u}{2r} = \frac{2\pi r}{2} r = \pi r^2$$
.

Da die Rechteckfläche gleich der Kreisfläche ist, ist also der Flächeninhalt des Kreises gleich πr^2.

Warum können wir davon ausgehen, dass die Kuchenstücke ein Rechteck bilden? Die zwölf Kuchenstücke bilden natürlich kein Rechteck. Denn zum einen sind die langen Seiten nicht gerade, sondern gewellt, und zum andern ist der Winkel an der Ecke der gedachten Fläche kein rechter Winkel.

Wenn wir die Kreisfläche in doppelt so viele Kuchenstücke aufteilen, sieht die Sache schon besser aus: Die Wellen werden kleiner und der Winkel kommt dem rechten Winkel näher. Und so geht es weiter: Je mehr Kuchenstücke wir verwenden, desto rechteckähnlicher wird die längliche Figur. Bei unendlich vielen Kuchenstücken wäre sie ein Rechteck. Daher ist der Kreisinhalt exakt gleich πr^2.

Diese Beweisidee geht auf Archimedes (287-212 v. Chr.) zurück.

Aufgaben

A. In einen Kreis mit Durchmesser d werden zwei kleine Kreise vom Durchmesser $d/2$ eingefügt, die sich im Mittelpunkt des großen Kreises berühren. Welchen Anteil der Kreisfläche überdecken sie?

B. Kannst Du vier Kreisscheiben mit Radius r so anordnen, dass sie sich nicht überlappen und in eine Raute der Seitenlänge $4r$ passen? Es ergibt sich eine spezielle Raute. Du erkennst diese, wenn Du die Kreise so dicht wie möglich aneinander fügst.
Welchen Anteil der Fläche der Raute überdecken die Kreise?

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen:

Kreis, Pi, Kreisformen: Klasse 9

Tangram

Mit den Tangram-Teilen kann man sehr viele verschiedene Figuren legen.

Versuche, ein Rechteck zu legen. (Tipp: Das Rechteck ist doppelt so lang wie breit, und die beiden großen Dreiecke liegen aneinander.)

Versuche, ein Dreieck zu legen, das gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Aufgaben

Wir setzen voraus, dass das große Quadrat, das man im Experiment legen muss, die Seitenläge 1 hat.

A. Bestimme die Seitenlängen der Teile. (Bei manchen musst Du wissen, wie lang die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 ist.)

B. Berechne den Flächeninhalt des kleinen Quadrats und aller Dreiecke.

C. Wie groß ist der Flächeninhalt des Parallelogramms?

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen

Figuren (Quadrat, rechtwinkliges Dreieck, Raute,…): Grundschule, Klasse 5, Klasse 8

Winkel (90°, 45°): Klasse 6

Bunte Steine

Mathematisch kann man die Aufstellung der Figuren entsprechend ihrer Farbe und ihrer Form wie folgt formulieren. Zunächst beschreiben wir nur die Aufstellung gemäß der Farbe (oder der Form).

Man nennt ein Quadrat mit n Zeilen und n Spalten ein *lateinisches Quadrat*, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte jede der Zahlen 1, 2, …, n genau einmal vorkommt. Der Name kommt daher, dass man ursprünglich anstelle von Zahlen lateinische Buchstaben geschrieben hat.

Die Kombination von Farbe und Form übersetzt sich wie folgt: Man nennt zwei lateinische n×n-Quadrate *orthogonal*, wenn folgendes gilt: Wir legen die beiden Quadrate übereinander. Dann liegt jede Zahl des oberen Quadrats über einer Zahl des unteren Quadrats. Dies ergibt insgesamt genau n^2 Kombinationen von Zahlen. Die lateinischen Quadrate werden orthogonal genannt, wenn diese n^2 Kombinationen alle verschieden sind. In diesem Fall sind dies die Kombinationen (1, 1), (1, 2), ..., (1, n), (2, 1), ..., (n, n).

Ein Paar von orthogonalen lateinischen 4×4-Quadraten entspricht genau der Aufgabenstellung der bunten Steine. (Das erste Quadrat besteht aus den Formen 1, 2, 3, 4, das zweiten aus den Farben 1, 2, 3, 4.)

Aufgaben

A. Im Folgenden siehst Du ein lateinisches 3×3-Quadrat und den Anfang eines weiteren lateinischen 3×3-Quadrats. Ergänze dies so, dass insgesamt ein Paar orthogonaler Quadrate entsteht.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3

B. Konstruiere ein lateinisches 5×5-Quadrat.

C. Ergänze das Quadrat, das Du in B. konstruiert hast, durch eine zweites 5×5-Qadrat zu einem Paar orthogonaler Quadrate. Mache das so, dass Du in die erste Zeile des zweiten Quadrats irgendeine Permutation der Zahlen 1, …, 5 schreibst (also zum Beispiel 34152).

Bruchteile zusammenlegen

Die antiken ägyptischen Mathematiker vor 4000 Jahren kannten im Wesentlichen nur Stammbrüche, also Brüche mit einer 1 im Zähler, z.B. 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 usw. Deshalb war es für sie besonders wichtig, mit diesen Brüchen gut umgehen zu können.

Aufgaben

A. Lege die Teile 1/2 + 1/6. Auf wie viele Weisen kannst Du das zu einem ganzen Kreis vervollständigen?
Auf wie viele Weisen klappt es, wenn die Teile 1/3 und 1/4 schon gelegt sind?

B. Wie groß sind die Winkel, die die Kreisausschnitte an ihrer Spitze haben?

C. Das Folgende ist ein Spiel für zwei Spieler: Die Spieler legen abwechselnd ein Teil. Wer als Erster nicht mehr legen kann, hat verloren.
Spieler 1 beginnt, indem er 1/4 legt. Wie kann der zweite Spieler reagieren, um zu gewinnen?
Gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 1?

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen

Bruchrechnung: Klasse 6

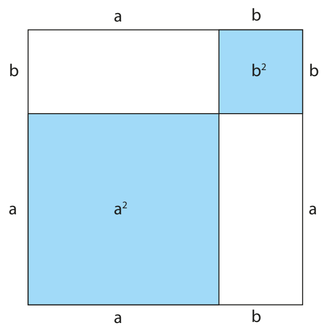
Winkel: Klasse 6

Der binomische Satz

Der binomische Satz

Der binomische Lehrsatz und auch der Spezialfall der „ersten binomischen Formel" sind von fundamentaler Bedeutung für viele Berechnungen. Der Hauptgrund dafür ist, dass mit Hilfe dieser Formel die Multiplikation mit der Addition verbunden wird.

Der geometrische Beweis, wie er in dem Experiment dargestellt ist, verläuft wie folgt: Man legt ein Quadrat der Seitenlänge a und ein Quadrat der Seitenlänge b so in ein quadratisches Feld der Seitenlänge $a+b$, dass die beiden Quadrate gegenüberliegende Ecken ausfüllen. Dann kann man das quadratische Feld vollständig auslegen, indem man die beiden Quadrate durch zwei Rechtecke der Seitenlängen a und b ergänzt (siehe Zeichnung).



Man kann die erste binomische Formel auch durch „Ausklammern" beweisen („algebraischer Beweis"):

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$.

Während der algebraische Beweis rein formal (und „emotionslos") abläuft, hat der geometrische Beweis die Anschaulichkeit für sich. Diese bürgt erfahrungsgemäß dafür, dass die Schülerinnen und Schüler den Beweis rekonstruieren können.

Aufgaben:

A. $1001^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 = 1.000.000 + 2000 + 1 = 1002001$.
Berechne auf ähnliche Weise 1002^2, 1003^2, 101^2, 1000005^2.

B. Die linke Seite der „zweiten binomischen Formel" lautet $(a – b)^2 = \ldots$ Wie lautet die rechte Seite?
Berechne mit Hilfe der zweiten binomischen Formel 99^2, 999^2, 998^2.

C. Sei a eine natürliche Zahl.
Welche Zahl muss man bei folgenden Ausdrücken ergänzen, um eine Quadratzahl zu erhalten?
$a^2 + 4a$, $a^2 + 6a$, $a^2 + 10a$

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen:

Termumformung, Variable, Quadrate: Klasse 8

Binomischer Satz 3D

Es gibt ein „3-dimensionales“ Analogon der binomischen Formel; genauer gesagt geht es um eine Gleichung, mit der man $(a + b)^3$ berechnen kann.

Auf algebraischem Weg kann man das leicht einsehen:

$(a + b)^3$	
$= (a + b)^2 \cdot (a + b)$	Um $(a + b)^3$ auszurechnen, rechnet man zunächst $(a+b)^2$ und multipliziert das Ergebnis mit $(a+b)$
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$	Erste binomische Formel
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$	Ausklammern

Das Experiment zeigt, dass man diese Formel auch dadurch einsehen kann, dass man einen Würfel mit Kantenlänge $a+b$ aus je einem Würfel der Kantenlänge a beziehungsweise b, sowie drei $a \times a \times b$-Quadern und drei $a \times b \times b$-Quadern zusammensetzen kann.

Der Vorteil der algebraischen Methode ist, dass wir auch $(a+b)^4$ ausrechnen können, ohne dass wir uns dazu einen „4-dimensionalen Würfel“ und seine Zerlegung vorstellen müssen:

$$
\begin{aligned}
& (a + b)^4 \\
= \; & (a + b)^3 \cdot (a + b) \\
= \; & (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) \\
= \; & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

A. Mache Dir bei jedem Gleichheitszeichen der obigen Rechnung klar, warum die Gleichheit gilt.

B. Berechne $(a + b)^5$.

C. Berechne mit den binomischen 3D-Formeln 101^3, 102^3, 99^3.

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen:

Termumformung, Variable: Klasse 8

Höhere („allgemeine“) Potenzen wie $(a + b)^n$ kommen im Schulunterricht nicht vor.

Summe ungerader Zahlen

Jeder „Haken“ stellt eine ungerade Zahl dar: Die Ecke in der Mitte des Hakens ist ein quadratisches Feld; die beiden „Schenkel“ enthalten gleich viele Felder. Also besteht der Haken insgesamt aus einer ungeraden Anzahl von Feldern, nämlich eine gerade Zahl auf den beiden Schenkeln plus das eine Eckfeld.

Umgekehrt kann jede ungerade Zahl durch einen Haken dargestellt werden. Zum Beispiel gehört zu der Zahl 9 der Haken, dessen Schenkel aus jeweils 4 Feldern bestehen.

Die Tatsachen, dass die Haken perfekt ineinander passen und dass die ersten n Haken ein Quadrat der Seitenlänge n ergeben, kann man als Nachweis dafür ansehen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich der n-ten Quadratzahl ist.

Aufgaben

A. Die n-te Quadratzahl ist n^2, die (n+1)-te Quadratzahl ist $(n+1)^2$. Was ist die Differenz dieser Zahlen?

B. Die wievielte ungerade Zahl ist dies?

C. Vervollständige: Zur n-ten Quadratzahl muss man die (n+1)-te ungerade Zahl addieren, um …

n	1	2	3	4	…	n
n-te ungerade Zahl	1	3	5	7		$2n - 1$
(n+1)-te ungerade Zahl	3	5	7	9		$2n + 1$
n-te Quadratzahl	1	4	9	16		n^2
(n+1)-te Quadratzahl	4	9	16	25		$(n+1)^2$

Das Qua-Dreieck

Um Flächeninhalte zu bestimmen, versucht man, eine beliebige Fläche in ein Quadrat gleicher Größe zu verwandeln.

In der traditionellen Mathematik spricht man in diesem Zusammenhang von „Quadratur".

Aufgaben

A. Vergewissere Dich, dass jedes der vier Teile einen rechten Winkel hat.

B. Welche Winkel haben die Größe 60 Grad?

C. Welche Winkel ergänzen sich zu 180 Grad (d.h. sind Nebenwinkel)?

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen:

Figuren (Quadrat, Dreieck): Grundschule, Klasse 5

Winkel (Nebenwinkel): Klasse 6, 7

Waben

Dieses Puzzle wurde erst 1987 erfunden, und zwar von Milton Bradley, der ihm den Namen „Drive Ya Nuts“ gab.

Aufgaben:

A. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Zunächst sucht man sich eines der sieben Sechsecke als mittleres aus. Die anderen sechs Sechsecke kann man auf die sechs Plätze rund um das innere Sechseck beliebig verteilen.

Schließlich kann jedes einzelne äußere Sechseck beliebig gedreht werden.

Fülle die folgende Tabelle aus.

Aktion	Anzahl
Eines der 7 Sechsecke ist das mittlere	
Die restlichen sechs Sechsecke werden auf die Plätze um das mittlere herum verteilt.	
Jedes der äußeren sechs Sechsecke kann beliebig rotiert werden	

Wie groß ist die Gesamtanzahl der Möglichkeiten?

B. Stell Dir vor, du würdest selbst das Spiel entwickeln. Auf jedem der sieben Sechsecke sollen die gleichen sechs Farben vorkommen.

Können die Farben auf jedem Sechseck die gleiche Anordnung haben?

Pythagoras zum Legen

Der Satz des Pythagoras drückt zunächst eine Gleichheit von Flächen aus: Die Summe der Flächen zweier Quadrate ($a^2 + b^2$) ist gleich der Fläche eines Quadrats (c^2). In den meisten Fällen wird dieser Satz aber dazu verwendet, Entfernungen zu berechnen. Dazu wird die Formel $c^2 = a^2 + b^2$ umgeformt zu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Das bedeutet: Wenn man a und b kennt, kann man c berechnen.

Aufgaben

A. Das Experiment zeigt die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Berechne jeweils die fehlende Quadratzahl:
$6^2 + 8^2 = ?^2$
$9^2 + ?^2 = 15^2$
$?^2 + 12^2 = 13^2$.

Kannst Du die Gleichung $x^2 + a^2 = (a+1)^2$ lösen? (Dabei ist a eine feste Zahl, zu der ein x gesucht wird.)

B. Der Satz des Pythagoras lautet: Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Quadrate über den kurzen Seiten (den „Katheten“) zusammen genau so groß wie das Quadrat über der langen Seite (der „Hypotenuse“). In Formeln: $a^2 + b^2 = c^2$.

Das gilt allerdings nur für rechtwinklige Dreiecke. Zum Beispiel gilt diese Gleichung nicht für ein gleichseitiges Dreieck der Seitenläge 4.

Gib die Seitenlängen von drei Dreiecken an, für die der Satz des Pythagoras nicht gilt!

C. Um von A nach B zu kommen, geht man zunächst 300 m nach Osten, dann 400 m nach Norden. Wie weit sind A und B voneinander entfernt?

Löse die Aufgabe für „100 m nach Osten und 100 m nach Norden“.

Angenommen, du musst gleich weit nach Osten wie nach Norden gehen. Die Punkte A und B sind 170 m voneinander entfernt. Wie weit nach Osten beziehungsweise Norden musst Du (ungefähr) gehen?

Einbindung in den Mathematikunterricht an deutschen Schulen

Satzgruppe des Pythagoras: Klasse 9